MA2 – „písemná" přednáška 13.5.2020

Nevlastní Riemannův integrál

Nevlastní Riemannův integrál je další, a v naší „matematice" poslední, rozšíření Riemannova jednorozměrného integrálu $\int_a^b f(x)dx$ (z matematiky A1). Nevlastní integrál překonává „dvě" „omezení" integrálu Riemannova – a to omezený interval, přes který integrujeme, a omezenost funkce, kterou integrujeme. Jistě pamatujete na nutnou podmínku existence $(R)\int_a^b f(x)dx$:

$$f \in R\langle a,b\rangle \Rightarrow f \text{ je funkce omezená v } \langle a,b\rangle$$

Které integrály nemohou být Riemannovy?

1) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, např. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$,

tj. integrál „přes" neomezený interval;

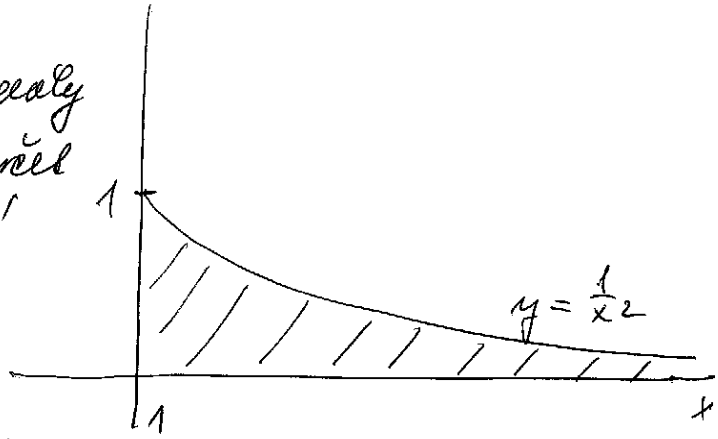
2) integrál z neomezené funkce, např.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

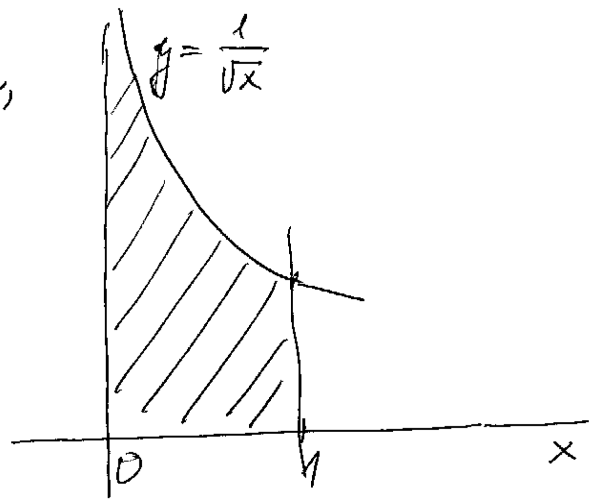
3) integrály z neomezených funkcí přes neomezený interval:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx, \quad \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x^2+2)}}dx, \text{ apod.}$$

„Představit" si můžeme takové integrály „pro $f(x) \geq 0$ v $\langle a,+\infty)$ jako výpočet plochy pod grafem f, která má nekonečně velkou" základnu, třeba pro $f(x)=\frac{1}{x^2}$ a $x \in \langle 1,+\infty)$,



nebo, v případě neomezené funkce, třeba $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1\rangle$, jako plochu, jejíž výška se „blíží" k nekonečnu.



A je již asi jasné, že abychom se „dostali" do nekonečna buď v oboru integrace, nebo při neomezenosti funkce v oboru, kde integrujeme, budeme „využívat" opět limitu – nevlastní integrál bude zřejmě znamenat počítat integrály i limity.

A jisté příklady takových integrálů, které se vyskytují v aplikacích:

(i v přírodních vědách), plochy s nekonečnou základnou asi nebudeme muset „řešit" (ale pro představu to je dobré")

- $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ – nazývá se Laplaceův, nebo Gaussův, nebo i Euler-Poissonův integrál
- $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ – Fresnelův integrál (také $\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx$) (častý ve fyzice)

- $$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx$$ $(a>0)$ – tzv. „Gamma funkce", (nebo Eulerův integrál 2. druhu) – (zobecnění $n!$: $\Gamma(n) = (n-1)!$) – patří mezi tzv. speciální funkce;

- $$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$ $(a>0, b>0)$ – „Beta funkce" – Eulerův integrál 1. druhu

- $$F(x) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-xt}\,dt$$ – $F(x)$ je tzv. Laplaceova transformace funkce f (důležité pro řešení diferenciálních rovnic)

- $$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi, \quad x\in R$$ – Fourierova transformace funkce f

1) <u>Jako první probereme podrobněji nevlastní integrál</u> $\underline{\int_a^\infty f(x)\,dx}$, „přes neomezený interval" $\langle a,+\infty)$, ostatní typy integrálů (21) přes interval $(-\infty, a\rangle$ a $(-\infty,+\infty)$ pak už probereme rychleji; a začneme definicí:

<u>Definice 1.</u> Nechť funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro každé $b>a$; pak, existuje-li vlastní limita $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, tak definujeme
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$
a říkáme, že $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje.

Jinak říkáme, že $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje.

<u>Příklady:</u>

1) $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$ <u>(konverguje)</u>, neboť

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$$

2) $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\big(1-\underbrace{e^{-b}}_{(\to 0)}\big) = 1$$

tj. <u>integrál konverguje</u> a rovná se 1.

3) <u>důležitý příklad!</u>: <u>$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konverguje $\iff p>1$</u>

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx \underset{p\neq 1}{=} \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\,x^{1-p}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right)\in R$$

$$\iff 1-p<0 \iff \underline{1<p}$$

<u>pro $p=1$</u>: $$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = +\infty,$$

tj. <u>$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverguje.</u>

4) $$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx \underset{\substack{\text{substituce}\\ \ln x = t}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^2}\,dt =$$

<u>konverguje</u>:

$$= \lim_{b\to\infty}\Big(\underbrace{-\frac{1}{\ln b}}_{\to 0}+\frac{1}{\ln 2}\Big) = \frac{1}{\ln 2}\in R$$

5) Ale u $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, nebo $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, takto vyšetřit konvergenci (resp. divergenci) neumíme, neboť primitivní funkce „neumíme" vyjádřit pomocí elementárních funkcí, tedy nevyjádříme $\int_0^b e^{-x^2}dx$ tak, abychom mohli „vypočítat" limitu $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^2}dx$ a tak rozhodnout o konvergenci (či divergenci), podobné je to i s integrálem $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

A toto bude pro nás nové, a zopakujeme si podobné úvahy i v případě pozdní přednášky o nekonečných řadách.

T.zv. kritéria konvergence si ukážeme až poté, co si budeme formulovat vlastnosti nevlastních integrálů (nevlastních s neomezeným oborem integrace) a definujeme i ty ostatní typy. Ale aspoň pro představu – když budeme „vidět" $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ jako plochu mezi osou x a grafem fce $f(x)=e^{-x^2}$, tak od $x=1$ je určitě $e^{-x^2} \leqq e^{-x}$, a $\int_1^\infty e^{-x}dx$ je konečný (příklad 2, i s $x=0$), tedy plocha „pod" grafem „menší" funkce bude asi také „menší", tj. konečná. A toto „zpřesníme", a budeme umět rozhodovat o tom, zda limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$ bude konečná, či ne, i bez výpočtu této limity – velice užitečná „dovednost"!

<u>Analogie – vlastnosti</u> $\int_a^\infty f(x)dx$ (budeme psát stručněji $\int_a^\infty f$):

1) $\int_a^\infty f$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_\alpha^\infty f$ konverguje pro každé $\alpha > a$ a platí:

$$\int_a^\infty f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\infty f$$

a obráceně:

$$\int_\alpha^\infty f \text{ konverguje a } f \in R(a,\alpha) \Rightarrow \int_a^\infty f \text{ konverguje};$$

2) $\int_a^\infty f$ konverguje i $\int_a^\infty g$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f+g$ konverguje i

$\int_a^\infty cf$ konverguje, $c \in R$, a $\int_a^\infty f+g = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$, $\int_a^\infty cf = c\int_a^\infty f$

(plyne z vět o limitách);

3) $g \leq f \leq h$ v $\langle a,+\infty)$, $\int_a^\infty g$, $\int_a^\infty f$, $\int_a^\infty h$ konvergují $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^\infty g \leqq \int_a^\infty f \leqq \int_a^\infty h$$

(opět plyne z vět o „uspořádání" limit).

Analogicky k definici konvergence $\int_a^\infty f(x)dx$ se definuje konvergence i $\int_{-\infty}^a f(x)dx$:

__Definice 2.__ Je-li $f \in R(c,a)$ pro každé $c<a$, a existuje-li limita $\lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx \in R$, pak definujeme $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx$ a říkáme, že $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ konverguje. Jinak říkáme, že $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ diverguje.

A poslední případ ze „skupiny" 1): $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – zde se musí dát pozor!

__Definice 3.__ Nechť konvergují integrály $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ i $\int_a^\infty f(x)dx$ pro nějaké $a \in R$. Pak říkáme, že konverguje i $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx.$$
Jinak říkáme, že $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ diverguje.

__Poznámky k definici 3:__

1. Jestliže $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ konverguje, pak pro lib. $b \in R$ konvergují i $\int_b^\infty f(x)dx$ i $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ a opět je $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$,

tedy <u>definice 3) je „korektní", nezávisí na tom, jaké „máme" $\underline{\underline{a}}$.</u>

Zkusme si to dokázat (jako „cvičení") – nechť $a<b$:

nechť konverguje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{, pak } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{a} f(x)dx + \lim_{d\to\infty} \int_{a}^{d} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{a} f(x)dx + \lim_{d\to\infty} \left(\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{d} f(x)dx \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx}_{+} + \underbrace{\lim_{d\to+\infty} \int_{b}^{d} f(x)dx}_{\in R} =$$

$$\underbrace{\lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx}_{\in R} + \underbrace{\lim_{d\to\infty} \int_{b}^{d} f(x)dx}_{\in R} = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx \quad \text{(cbd)}$$

(analogicky lze důkaz „udělat" i pro $b<a$)

2. Proč není definice $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$?

Příklad:
tj.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{2x}{1+x^2}dx = \lim_{a\to\infty} 0 = 0$$

(neboť $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ je lichá v R,
tj. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{2x}{1+x^2}dx = 0$, nebo přímo lze i zjistit výpočtem: $\left[\ln(1+x^2)\right]_{-a}^{a} = 0$

ale $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx =$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{2x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \ln(1+b^2) = +\infty \ !$$

a nebyla by asi „rozumná“ taková definice konvergence $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, tedy by $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ konvergoval, ale $\int_{0}^{\infty} f$ divergoval (integrál přes „část“ intervalu $(-\infty,+\infty)$ by byl nekonečný, ale přes celý interval $(-\infty,+\infty)$ konečný).

Nicméně, $\lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ se zkoumá (často v aplikacích) a tato limita se nazývá též „hlavní hodnota“ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

A nyní

<u>Kritéria konvergence</u> (pro $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, a tedy i $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$) – t.j. „jak“ zjistit, zda $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ (resp. $\lim\limits_{b\to-\infty} \int_{b}^{a} f(x)\,dx$) je konečná, nebo ne, bez výpočtu $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ $(b>a)$ ($\int_{b}^{a} f(x)\,dx, (b<a)$)

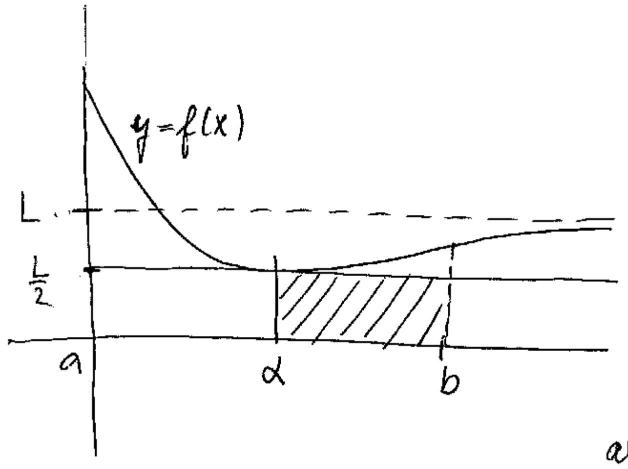
1) <u>Věta:</u> <u>Nutná podmínka konvergence</u> $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ (pro $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ analogicky)

Jestliže $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(tj. odtud: Je-li $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0 \Rightarrow \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ diverguje)

<u>Zkusme tuto větu i dokázat:</u>

Předpokládejme, že $L>0$; pak platí: (z definice $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$) ke $K=\frac{L}{2}$ existuje $\alpha>0$ tak, že $f(x) > L-\frac{L}{2} = \frac{L}{2}$ pro $\forall x>\alpha$:



Vezměme $b > \alpha$; pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx$$

ale $\int_\alpha^b f(x)dx \geq \frac{L}{2}(b-\alpha)$,

tedy $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \geq \lim\limits_{b\to\infty} \Big(\underbrace{\int_a^\alpha f(x)dx}_{(\in R)} + \underbrace{\frac{L}{2}(b-\alpha)}_{\xrightarrow[b\to\infty]{} \infty} \Big) = \infty$!,

tedy, $\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje.

2) <u>Postačující podmínky konvergence</u> $\int_a^\infty f(x)dx$:

tj. když „něco" víme o konečnosti nebo nekonečnosti limity, i když limitu „neumíme" spočítat?

<u>Co víme o existenci a konečnosti limit – z „teorie" limit funkcí?</u>

1. f je neklesající (nerostoucí) funkce v $\langle a,+\infty)$ $\Rightarrow$ existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

2. Je-li f neklesající v $\langle a,+\infty)$, f je shora omezená, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in R$;
   není-li f shora omezená v $\langle a,+\infty)$, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   (analogicky pro nerostoucí funkce v $\langle a,+\infty)$:
   je-li f zdola omezená, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in R$,
   není-li f zdola omezená, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)

A jak lze tuto větu o limitě monotónní funkce využít při vyšetřování konvergence nevlastních integrálů?

1) Vezměme si $f \in R(a,b)$ pro $b > a$ a $f(x) \geqq 0$ v $\langle a, +\infty)$;

pak $\underline{F(b)} = \int_a^b f(x)dx$ <u>je neklesající funkce v $\langle a, +\infty)$</u>, neboť:

je-li $a < b_1 < b_2$, pak $\int_a^{b_2} f(x)dx = \int_a^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqq \int_a^{b_1} f(x)dx$,

neboť je-li $f(x) \geqq 0$ v $\langle b_1, b_2 \rangle$, je $\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqq 0$!,

tedy, <u>pro lib. $b_1 < b_2$ je $F(b_1) \leq F(b_2)$</u>

2) Je-li $f(x) \leqq g(x)$ v $\langle a, +\infty)$, $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$
$(f, g \in R(\langle a, b \rangle),\ \forall b > a)$

a jestliže $\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje, tj. $\lim\limits_{x \to b} \int_a^b g(x)dx \in R$, je

funkce $G(b) = \int_a^b g(x)dx$ shora omezená, tedy, protože

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = G(b),$$

je i $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ shora omezená funkce proměnné b,

a navíc neklesající, tedy existuje vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} F(b) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx,$$

tedy $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje.

A tak jsme dokázali tuto větu:

<u>Věta (srovnávací kritérium konvergence</u> $\int_a^\infty f(x)\,dx$):

Nechť 1) $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$;

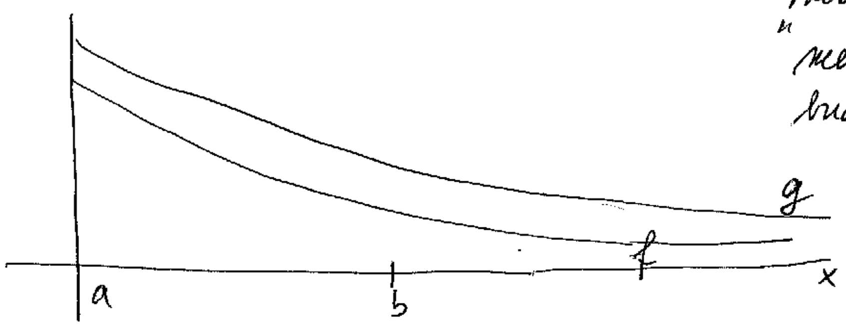
2) $0 \le f(x) \le g(x)$ v $\langle a,+\infty)$.

Pak platí: $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje

(lze také „obráceně" aplikovat :

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverguje).

<u>A lze si to asi takto „představit"</u> :



když plocha „pod" funkcí „větší" je konečná, i pod „menší" (nezápornou) funkcí bude plocha (mezi grafem a osou x) konečná.

<u>Příklady</u>:

1) $\int_0^\infty \frac{x-1}{x+1}\,dx$ diverguje, neboť $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$;

2) abychom mohli při vyšetřování konvergence $\int_a^\infty f(x)\,dx$ užít srovnávací kritérium, „potřebujeme" zásobu funkcí, jejichž integrály umíme a můžeme užít ke „srovnání", jsou to

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$; $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p>1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{1-p}\,\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^b \in R \Leftrightarrow p>1$$
$p \neq 1$

(pro $p \leqq 0$ je i $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{x^p} \neq 0$!)

a $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b = +\infty$$

3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^8+1}\,dx$ konverguje, neboť: $\dfrac{1}{x^8+1} \leqq \dfrac{1}{x^8}$ pro $x \geqq 1$,

a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^8}\,dx$ konverguje (dle př. 2);

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^8+1}\,dx$ konverguje, neboť $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^8+1}\,dx$ konverguje

(„vlastnost" 1);

4) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$ diverguje, neboť $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ v $\langle 2,+\infty)$

a (dle př. 2) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverguje.

5) ale $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^8-1}\,dx$ – asi konverguje, neboť $\dfrac{1}{x^8-1} \approx \dfrac{1}{x^8}$ pro $x \to +\infty$,

ale „odhad nemáme" – $\dfrac{1}{x^8-1} \geqq \dfrac{1}{x^8}$ pro $x \in \langle 2,+\infty)$,

a z konvergence integrálu „menší" funkce nemůžeme „nic soudit" o konvergenci (divergenci) integrálu z funkce „větší".

Ale když „cítíme", že pro $x \to +\infty$ je $\frac{1}{x^8-1}$ skoro $\frac{1}{x^8}$, jak toto přesněji vyjádřit, abychom mohli srovnání opět využít k vyšetřování konvergence $\int_a^\infty f(x)dx$? Vzpomeňme si opět na limity a jejich užití - když jsme měli funkce $f(x), g(x)$, které obě měly v $+\infty$ (nebo i „jinde") nulové limity, tak rychlost, se kterou „šly" funkce k nule, jsme porovnávali pomocí limity podílu - když $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = {}_{''}\frac{0}{0}{}'' = A \in R, A \neq 0$, pak jsme odtud usuzovali, že rychlosti konvergence f a g k nule v $+\infty$ jsou srovnatelné („řádově" stejné) (když $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = {}_{''}\frac{0}{0}{}'' = 0$, tak f byla „řádově" menší, a obráceně, když $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, pak ta „menší" nula byla ve jmenovateli. A odtud testu pro použití jednodušší srovnávací kritérium:

<u>Věta (limitní srovnávací kritérium)</u>

1) nechť $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$ pro $\forall b > a$, $f(x) \geqq 0$ a $g(x) > 0$ v $\langle a, +\infty)$;

2) nechť $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$;

Pak, je-li a) $A > 0$, tak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ konverguje;

b) $A = 0$, tak $\int_a^\infty g(x)$ konverguje $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)$ konverguje;

c) $A = +\infty$, tak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)$ konverguje.

Důkaz (naznačení důkazu pro zájemce, ale číst nemusíte):

1. předpoklad věty:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \ (>0, \text{nebo i } =0) \ \overset{\text{definice}}{\equiv}$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists x_0>0 \ \forall x>x_0: \qquad A-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A+\varepsilon \quad \big| \ g(x)>0$$

$$(A-\varepsilon)g(x) < f(x) < (A+\varepsilon)g(x) \quad \text{v } \langle x_0,+\infty)$$

a) $A>0$, zvolme $\varepsilon = \frac{A}{2}$, pak $\frac{A}{2}g(x) < f(x) < \frac{3A}{2}g(x)$ v $\langle x_0,+\infty)$

a platí $f(x)\geq 0$, $g(x)>0$ v $\langle x_0,+\infty)$, můžeme užít srovnávacího kritéria (nelimitního) a dostáváme:

$$(*)\ \left(\int_a^\infty g(x)dx, \ \int_a^\infty f(x)dx \text{ budou konvergovat} \iff \int_{x_0}^\infty g(x)dx, \ \int_{x_0}^\infty f(x)dx \text{ konvergují} \right)$$

$$\int_{x_0}^\infty g(x)dx \text{ konverguje} \Rightarrow \int_{x_0}^\infty \frac{3A}{2}g(x)dx \text{ konverguje} \Rightarrow \int_{x_0}^\infty f(x)dx \text{ konverguje}$$

a též $\displaystyle\int_{x_0}^\infty f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^\infty \frac{A}{2}g(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^\infty g(x)dx$ konverguje,

tedy (díky (*)) platí: $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje $\iff \displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje;

b) $A=0$: máme „jen" odhad $0\leq f(x) < \varepsilon_0 g(x)$, $\varepsilon_0>0$ (pevně zvolené) v $\langle x_0,+\infty)$,

a tedy (opět ze srovnávacího kritéria plyne) (a z (*))

$$\int_a^\infty g(x)dx \text{ konverguje} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ konverguje.}$$

c) je-li $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, pak k lib. $K>0$ (zvolme K pevně)

existuje $x_0>0$ tak, že pro $x>x_0$ je $\frac{f(x)}{g(x)} > K$, a opět tedy, $(g(x)>0)$, že $f(x) > Kg(x)$ v $\langle x_0,+\infty)$, a dostáváme (srovnávací kritérium): $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int\limits_{x_0}^{\infty} g(x)dx$ konverguje,

a tedy i (viz (*)) $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$ konverguje.

Příklady:

1) „snadno" $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x^8-1}dx$ konverguje, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^8-1}}{\frac{1}{x^8}} = 1$,

a $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x^8}dx$ konverguje;

2) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2-2}dx$ konverguje, neboť:

„odhad" $\frac{2\sqrt{x}}{x^2-2} \sim \frac{1}{x\sqrt{x}}$, „přesně"

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x^2-2}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-2} = 2 > 0,$$

a $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ konverguje ($p=\frac{3}{2}>1$ ve srovnávacím integrálu);

3) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$ konverguje – i srovnávací kritérium:

$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$ v $\langle 1,+\infty)$, $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ konverguje nebo limitním srovnáním: $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ pro $x \to \infty$,

přesně: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{2} > 0$, tj. $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$ konverguje,

neboť $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje;

4) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ diverguje, neboť

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}$, $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverguje (a srovnávací

limitní kritérium – $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$
(je ekvivalence pro $A>0$) konverguje, pokud $A\left(=\frac{\pi}{2}\right) > 0$)

5) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje, neboť stačí vyšetřit $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$,

a zde buď: $e^{-x^2} \le e^{-x}$ pro $x \ge 1$, a $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = 1$

(někdy se píše místo $\lim\limits_{b\to\infty}\left[f(x)\right]_a^b = \left[f(x)\right]_a^\infty$)

nebo „limitní" srovnání

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \underset{\substack{\text{VLSF}\\(t=x^2)}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} \underset{\text{l'H}}{=} 0,$$ a tedy, neboť

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje, i $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje, a tedy i $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje.

6) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ diverguje, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} \underset{l'H.}{=} +\infty$,

tedy, protože $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverguje, tak i $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ diverguje

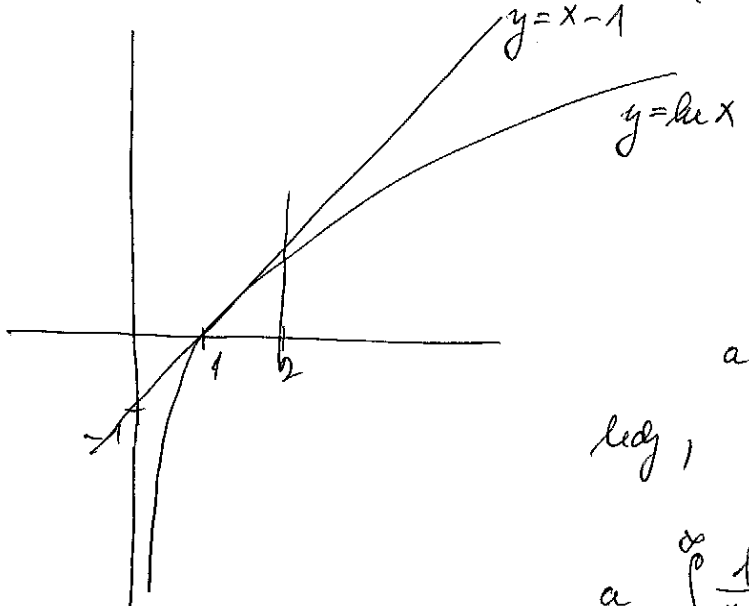
(tvrzení c) se týká; $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, pak platí:

$\displaystyle\int_a^{\infty} f$ konverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{\infty} g$ konverguje, tedy, $\displaystyle\int_a^{\infty} g$ diverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{\infty} f$ diverguje)

7) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ konverguje, neboť $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{l'H.}{=} 0$)

a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje.

Poznámka – v příkladu 6) lze využít i odhad pro fci $\ln x$:
(a absolutní srovnání)



Jak je známo, $y = x-1$ je tečna ke grafu fce $y = \ln x$ v bodě $[1,0]$ a platí

$$\ln x \leq x-1 \text{ pro } x \geq 1,$$

a $$\ln x < x-1 \text{ pro } x \geq 2,$$

tedy, $$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{\ln x} \text{ v } x \geq 2$$
$(\ln x > 0,\ x-1>0)$

a $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \big[\ln|x-1|\big]_2^b = \infty$, tedy

(ze srovnávacího kritéria dostáváme, že) i $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$ diverguje.

V předchozím vyšetřování konvergence integrálu $\int_a^{\infty} f(x)dx$ bylo zcela podstatné, že $f(x) \geqq 0$ v $\langle a,+\infty)$ (integrovatelnost f, tj. $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$, předpokládáme zde stále), a díky tomu existovala $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ (limita neklesající funkce)

a „jen" se rozhodovalo o tom, zda je tato limita vlastní, či nevlastní. Myslím, že je zřejmé, že stejně tak lze srovnávací kritéria užít i pro fce $f(x) \leqq 0$ v $\langle a,+\infty)$ (vyšetřuje $\int_a^{\infty}(-f(x))dx$, a $\int_a^{\infty}(-f(x))dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konverguje)

Jakmile ale funkce f v intervalu $\langle a,+\infty)$ znaménko mění, pak funkce $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ není monotónní (obecně) a srovnávací kritéria nelze použít. <u>Ale platí (důležitá věta)</u>:

<u>Věta!</u> Jestliže $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ konverguje, pak konverguje i integrál

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ (opět předpokládáme, že $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$, pak lze ukázat, že i $|f| \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$). a má tedy smysl vyšetřovat integrály nevlastní $\int_a^{\infty} f(x)dx$ a $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$)

<u>„Názvosloví"</u>: Pokud $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$, a $\int_a^{\infty} |f|$ konverguje, pak říkáme, že $\int_a^{\infty} f$ <u>konverguje absolutně</u>.

Důkaz (náznačný) – pro jednoduchost budeme předpokládat, že f je spojitá v $\langle a,+\infty)$, tedy i $|f|$ je spojitá v $\langle a,+\infty)$ a f i $|f|$ jsou pak integrovatelné v každém intervalu $\langle a,b\rangle$, $b>a$.

Definujme funkce $f^+(x) = \max(f(x),0)$, $x\in\langle a,+\infty)$ a $f^-(x) = \max(-f(x),0)$, $x\in\langle a,+\infty)$; } „obrázek" na straně 22 (podívejte se)

Pak je: $0 \le f^+(x) \le |f(x)|$, $0 \le f^-(x) \le |f(x)|$

($f^+(x)$ i $f^-(x)$ jsou spojité, a tedy i integrovatelné v $\langle a,b\rangle$, $b>0$)

a můžeme užít srovnávací kritérium:

$$\int_a^\infty |f(x)|dx \text{ konverguje} \Rightarrow \int_a^\infty f^+(x)dx \text{ i } \int_a^\infty f^-(x)dx \text{ konvergují};$$

A nyní: je $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, a tedy, konverguje i

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f^+(x)dx - \int_a^\infty f^-(x)dx$$ (což jsme měli ukázat).

Poznámka: Pokud je ale $\int_a^\infty |f(x)|dx$ integrál divergentní, může $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergovat – pak se takové konvergenci říká neabsolutní konvergence integrálu $\int_a^\infty f(x)dx$, ale je často velmi obtížné vyšetřit tuto konvergenci (nebo divergenci). Jsou také kritéria neabsolutní konvergence, ale dost náročná, nebudeme zde „prohírat", zájemci najdou v doporučené literatuře („pokročilé")

<u>Příklad</u> 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$:

$\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ konverguje, neboť: $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje;

tedy, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ <u>konverguje absolutně.</u>

(stejně i $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ konverguje absolutně pro $p>1$)

2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje (a tedy i $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$),

i když $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverguje, tedy,

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ je příklad neabsolutně konvergentního integrálu

---

<u>Výpočet</u>: $$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{pp}{=} \lim_{b\to\infty} \Bigg(\underbrace{\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^b}_{\to 0} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{-\cos x}{x^2}\,dx}\Bigg),$$

(věta o shazování) a

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konverguje

(srovnávací kritérium)

tedy, $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin x}{x}\,dx \in \mathbb{R}$!

Ale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ diverguje – dokážeme to „sporem":

předpokládejme, že $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ konverguje, pak i $\left(\frac{|\sin x|}{x} \geqq \frac{\sin^2 x}{x}\right)$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ konverguje, ale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right)dx$; dá se (podobně jako u $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$)

ukázat, že $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ konverguje, tedy „musí" konvergovat

i $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\left(\frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{2x}\right)dx$, ale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ je divergentní!! –

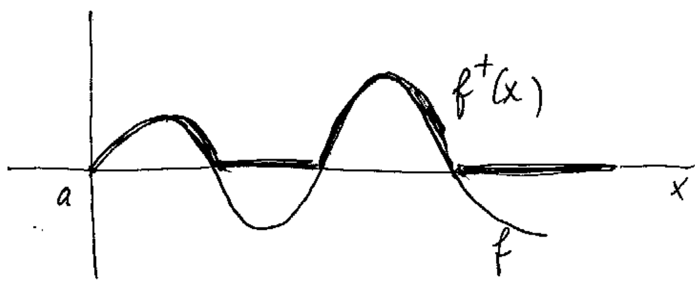
– tedy máme „spor" a $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ je tedy divergentní!

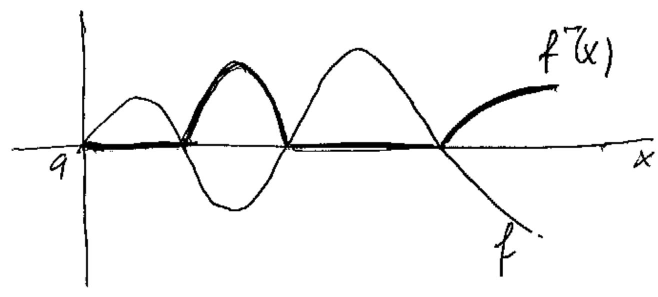
A ještě poznámka k další větě o absolutní konvergenci:

$f(x)$ je dána na $\langle a, +\infty)$, pak bylo

$$f^+(x) = \max_{x \in \langle a,+\infty)} (f(x), 0)$$

$$f^-(x) = \max_{x \in \langle a,+\infty)} (-f(x), 0)$$



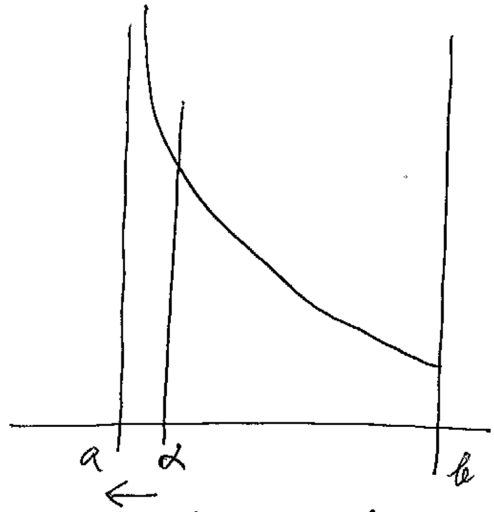


Kriteria konvergence a absolutní konvergence byla formulována pro nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, ale věřím, že je zřejmé, že tato kriteria lze formulovat analogicky i pro nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ – pro funkci $f(x)\in \mathcal{R}(\langle c,a\rangle)$, $\forall c<a$ a $f(x)\geq 0$ jde o limitu funkce $F(c)=\int\limits_c^a f(x)\,dx$ pro $c\to-\infty$, $F(c)$ je opět monotonní (nerostoucí), pro vlastní limitu, tj. pro $\lim\limits_{c\to-\infty} F(c)\in R$ je třeba omezenost shora na $(-\infty,a\rangle$ a opět tedy budou „fungovat" srovnání „absolutní" nebo „relativní" v limitním srovnávacím kriteriu. A bude dále platit též implikace $\int\limits_{-\infty}^a |f(x)|\,dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ konverguje, tj. absolutní konvergence. A pojem konvergence integrálu $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ je definován tak, že konverguje $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ i $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ a

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

(v ostatních případech $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverguje), tak máme vše i pro integrál tento.

A nyní (už stručněji) vyšetříme (a nejprve definujeme) konvergenci integrálu z neomezených funkcí přes interval omezený, ale pak také i přes interval neomezený.



Nevlastní integrál z neomezených funkcí

1) $\int_a^b f(x)\,dx$, kde $a<b$, $a,b\in R$ a f není omezená v okolí bodu a (v $P_+(a)$)

(třeba jednodušší – $\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$)

Definice a) Nechť $f\in R(\langle\alpha,b\rangle)$ pro $\forall\, a<\alpha<b$; ex-li vlastní limita $\lim_{\alpha\to a+}\int_\alpha^b f(x)\,dx$ $(\in R)$, pak tuto limitu nazýváme

nevlastní integrál z funkce f od a do b a značíme
(také nevlastní integrál vlivem dolní meze)

$\int_a^b f(x)\,dx$ (a pokud existuje $(N)\int_a^b f(x)\,dx$, tak platí
$$\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx \text{).}$$

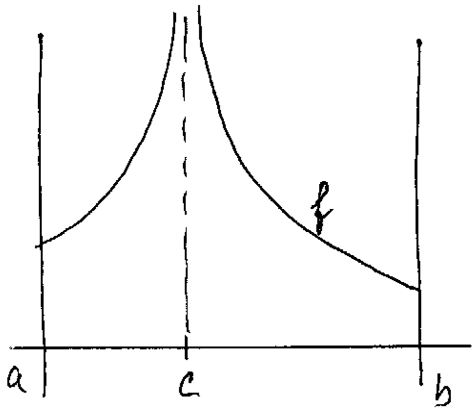
(a říkáme, že integrál konverguje)
Jinak, tj. pokud limita je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje.

Definice b) Je-li funkce f neomezená u $b-$, $f\in R(\langle a,\beta\rangle)$ pro $\forall\beta$: $a<\beta<b$, pak, ex-li limita vlastní

$\lim_{\beta\to b-}\int_a^\beta f(x)\,dx$, nazýváme tuto limitu nevlastním integrálem funkce f od $\underline{a}$ do $\underline{b}$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.
V ostatních případech říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje.

Zde také název – <u>nevlastní integrál vlivem horní meze.</u>

Definice c)



f je neomezená funkce v $P(c)$, $f \in R(\langle a,\gamma\rangle)$ pro $\forall\ a<\gamma<c$ a $f \in R(\langle \delta, b\rangle)$ pro $\forall\ c<\delta<b$; pak říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, jestliže konvergují integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$

a pak $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Jinak říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.

Příklady:

(1.) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ konverguje $\iff$ $p<1$ $(p>0)$ — opět „srovnávací" integrály (pro užití ve srovnávacím kritériu)

(nevlastní vlivem dolní meze pro $p>0$)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\alpha\to 0+}\left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_\alpha^1 = 1,$$ je-li $p-1<0$, tj. $p<1$

$p \neq 1$ $(p>0)$

(fce je neomezená u $0+$)

je-li $p-1>0$, je $\lim_{\alpha\to 0+}\left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_0^1 = +\infty$,

je-li $p=1$, je $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to 0+}\int_\alpha^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to 0+}\left[\ln x\right]_\alpha^1 = +\infty$

a příklad: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\alpha\to 0+} 2\left[\sqrt{x}\right]_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0+}(2-2\sqrt{\alpha}) = 2$

ale $(N) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$.

(2.) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\beta\to 1-} \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\beta\to 1-} \Big[\arcsin x\Big]_0^{\beta} = \frac{\pi}{2},$$

fce neomezená u 1− (integrál nevlastní vlivem horní meze)
tedy integrál konverguje.

(3.) Analogicky k příkladu 1): $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$

$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p<1$, a podobně
(nevlastní vlivem dolní meze pro $p>0$)

$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p<1$
(nevlastní vlivem horní meze)

„srovnávací" integrály pro $\int_a^b f(x)\,dx$ a f neomezená u $a+$ (resp. $b-$)

(4.) $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \int_{\alpha}^1 \ln x\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \Big[x\ln x - x\Big]_{\alpha}^1 =$$

f neomezená u 0+ (integrál nevlastní vlivem dolní meze)

$$= \lim_{\alpha\to 0+} \big(-1-(\alpha\ln\alpha-\alpha)\big) = -1,$$

neboť $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \alpha\ln\alpha =$ „$0\cdot(-\infty)$" $= \lim\limits_{\alpha\to 0+} \dfrac{\ln\alpha}{\frac{1}{\alpha}} =$ „$\dfrac{-\infty}{\infty}$" $=$

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha^2}} = \lim_{\alpha\to 0+}(-\alpha) = 0$$

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ nebo $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$ – u těchto integrálů je funkce neomezená u obou mezí – – chybí zatím definice!

Definice (nevlastní integrál vlivem obou mezí a, b)

Mějme interval (a,b), $a; b \in R$, $x_0 \in (a,b)$ a nechť $f \in R(\langle \xi, x_0 \rangle)$ pro $\forall \xi: a < \xi < x_0$ a $f \in R(\langle x_0, \eta \rangle)$ pro $\forall \eta: x_0 < \eta < b$; řekneme, že funkce f má konvergentní nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, když konvergují $\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ i $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$, a pak
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx.$$

Jinak řekneme, že $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje.

(a opět, jako u $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ nezáleží na „výběru" bodu $x_0 \in (a,b)$)

a příklad 5):

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{?}{=} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\text{nevlastní vlivem dolní meze}} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\text{nevlastní vlivem horní meze}} \quad (?)$$

tyto integrály neumíme opět vyčíslit pomocí vzorců primitivní funkce – teď budeme muset vymyslet analogii ke srovnávacím kritériím v případě $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ – za „chvilku", teď nějaký jednodušší příklad:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{konverguje, neboť}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\beta \to 1-} [\arcsin x]_0^{\beta} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\alpha \to -1+} [\arcsin x]_{\alpha}^0 = \frac{\pi}{2}$$

A tedy, $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

A zde je vidět, že někdy toto zvládá Newtonův integrál (MA1):

$$(N) \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$ – a hotovo!

<u>Kritéria konvergence</u> (pro $\int\limits_a^b f(x)$ nevlastní vlivem horní meze, pro integrál $\int\limits_a^b f(x)$ nevlastní vlivem dolní meze analogicky)

<u>Srovnávací kritérium:</u>

Nechť 1) $f(x) \geq 0$ v $\langle a, b)$, $f \in R(\langle a, \beta\rangle)$ pro $\forall \beta, a < \beta < b$
($a < b$, $a, b \in R$) (tak předpokládat f spojitá v $\langle a, b)$, pak předpoklad R-integrovatelnosti je splněn)

2) $f(x) \leq g(x)$ v $\langle a, b)$:

Pak platí: $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje

(a tedy i $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ diverguje $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ diverguje)

Limitní srovnávací kritérium:

1) nechť $f, g \in R(\langle a, \beta\rangle)$ pro $\forall \beta$, $a<\beta<b$, $(a, b \in \mathbb{R})$
(stačí pro jednoduchost předpokládat spojitost funkcí f a g v $\langle a, b)$)

2) nechť $f(x) \geq 0$ a $g(x) > 0$ v $\langle a, b)$;

Pak: a) $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A > 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konverguje;

b) $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje;

c) $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konverguje

---

A analogicky lze formulovat srovnávací kritéria i pro integrál nevlastní vlivem dolní meze, a také pro funkce $f(x) \leq 0$ v $\langle a, b)$ (nebo $f(x) \leq 0$ v $(a, b\rangle$)

A příklad 5) teď snad už budeme umět:

Máme-li vyšetřit konvergenci $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, rozdělíme vyšetřování na $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

$\int_0^{\frac12} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$:

odhad: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim 1$ pro $x \to 0+$, tedy $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \ln x$ pro $x \to 0+$, a $\int_0^1 \ln x\,dx$ konverguje, tedy „asi" náš integrál konverguje –

a přesně užitím limitního srovnání:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln x} = 1, \quad \int_0^{\frac12} \ln x\,dx \text{ konverguje (příklad 4.)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} < 0,\ \ln x < 0 \text{ v } (0,\tfrac12\rangle \right) \Rightarrow \int_0^{\frac12} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \text{ konverguje;}$$

a $\int_{\frac12}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$: můžeme vyšetřit $\int_{\frac12}^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left(f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \text{ v } \langle\tfrac12, 1) \right)$

a $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{\frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim\limits_{x\to 1-}(-\ln x) = 0$, $\int_{\frac12}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (limitní srovnávací kritérium) $\int_{\frac12}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje,

tedy, dle definice konverguje i $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Poznámka: lze také zjistit, že

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-} \underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 1} \cdot \frac{x-1}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to 0}\sqrt{1+x}} = 0,$$

tedy funkce je omezená u 1– a integrál je nevlastní jen vlivem dolní meze.

Další příklady:

(6.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje, neboť buď

a) $\displaystyle 0 < \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ v $\left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

(srovnávací kritérium)

nebo b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \cos x = 1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

(limitní srovnávací kritérium)

(7.) $$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x^2}}\,dx$$ konverguje,

(nevlastní vlivem horní meze)

neboť:

1) $$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$$

(pro limitní srovnání)

nebo platí $\displaystyle \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ v $\langle 0, 1)$

(pro srovnávací kritérium)

2) a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ konverguje $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\,dx \text{ pro } p = \frac{1}{2}\right)$

(a tedy konvergence daného integrálu je „dána" srovnávacími kritérii)

Ještě jeden „druh" nevlastních integrálů uveďme –

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, kde navíc funkce f není omezená v $(a,+\infty)$:

<u>A opět definice:</u> $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje, když konvergují integrály

$\int_a^{b} f(x)\,dx$ i $\int_b^{\infty} f(x)\,dx$, kde $b \in (a,+\infty)$.

(jinak $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ <u>diverguje</u>)

(Opět zde nezáleží na volbě b, a analogicky se definuje i

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ pro funkci neomezenou v okolí bodu a)

Kritéria pro konvergenci obou typů integrálů v definici „máme".

<u>Trochu „těžší" příklad na závěr:</u>

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$$

1) integrál nevlastní vlivem dolní meze:
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^2-1} = +\infty$$

2) integrál nevlastní díky „horní mezi" $+\infty$

3) a ještě $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ není definována

v bodě $x = 1$!

ale zde $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$,

tedy f je omezená v okolí bodu $x = 1$, a navíc lze fci dodefinovat spojitě v $x = 1$, tedy zde není problém.

A nyní: 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ konverguje, neboť

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln x}{x^2-1}}{-\ln x} = +1, \quad \text{a} \quad \int_0^1 (-\ln x)\,dx \text{ konverguje}$$

(příklad 4)

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ též konverguje – vezmeme

srovnávací funkci $g(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3}$ v $\langle 1,+\infty)$,

pak $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2-1}}{\frac{1}{(\sqrt{x})^3}} = 0, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \text{ konverguje},$$

tedy (limitní srovnávací kritérium) i

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ konverguje,

a tedy, z 1) a 2) plyne, že $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ konverguje.

A ještě výpočet limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2-1}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x \cdot x^{3/2}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}_{\to 1} = 0$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \;\text{``}\!=\frac{\infty}{\infty}\text{''} \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \right)$$

Poznámka:

Užití integrace per partes a substituce pro výpočet (či vyšetření konvergence) nevlastních integrálů:

Integrace per partes: (např., ostatní případy analogicky)

$$\int_a^{\infty} f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^{\infty} - \int_a^{\infty} f(x)g'(x)\,dx,$$

pokud aspoň dvě z limit mají smysl, předpokládáme $f'(x), g'(x)$ spojité v $\langle a, +\infty)$

Substituce:

f je spojitá v $\langle a, b)$, $\varphi'(t)$ je spojitá v $\langle \alpha, \beta)$, $\varphi'(t) > 0$ v $\langle \alpha, \beta)$,
$\varphi(\langle \alpha, \beta)) = \langle a, b)$, $\lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t) = b$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

když konverguje aspoň jeden z integrálů.

Příklad:

$$I = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2}dx = dt \end{array} \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1$$

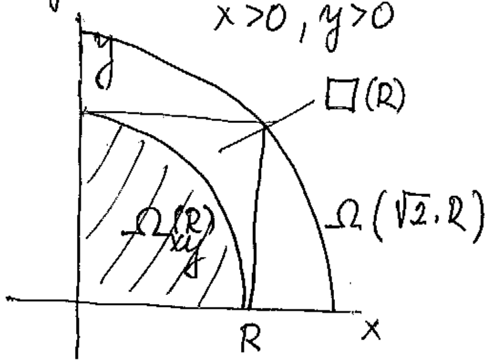
I konverguje, absolutně, neboť $\left|\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2}$ v $\langle \frac{2}{\pi}, \infty)$ a
$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje, tedy lze substituci, uvedenou shora, „použít“.

A ještě navíc – výpočet Laplaceova integrálu: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1) „Krásný" nápad: vezme se integrál

$$\iint_{\Omega_{xy}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \underset{\substack{\text{polární}\\ \text{souřadnice}}}{=} \int_{\Omega_{r,\varphi}} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi \underset{F.V.}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2}\cdot r\,dr =$$

$\Omega_{xy} = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le R,\ x>0,\ y>0\}$



$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^R\right) = -\frac{\pi}{4}\left(e^{-R^2}-1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

2) další „nápad": $$\iint_{\underbrace{\langle 0,R\rangle\times\langle 0,R\rangle}_{\square(R)}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

3) a nyní je „vidět", že plochy (míry integračních oblastí) splňují: $\Omega(R) < S(\square(R)) < \Omega(\sqrt{2}R)$, tedy pak

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

(integrujeme nezápornou funkci)

a tedy vezmeme limitu pro $R\to\infty$ a užijeme věty o strážnících, dostaneme (užití definice nevlastního integrálu)

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \le \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx \le \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

tedy $$\underline{\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}\quad !$$